解答速報

兵庫医科大学（一般）

数学

▮医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX

1

(1)　$6^n < 5^{20} < 6^{n+1}$ より，$\log_{10} 6^n < \log_{10} 5^{20} < \log_{10} 6^{n+1}$.

よって，$n\log_{10} 6 < 20\log_{10} 5 < (n+1)\log_{10} 6$.

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$，$\log_{10} 5 = \log_{10}\dfrac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 0.6990$ であるから，

$0.7781n < 20\cdot 0.6990 < 0.7781(n+1)$ より，$\dfrac{20\cdot 0.6990}{0.7781} - 1 < n < \dfrac{20\cdot 0.6990}{0.7781}$

ここで，$\dfrac{20\cdot 0.6990}{0.7781} = 17.96\cdots$ より，$16.96\cdots < n < 17.96\cdots$. $\therefore$ $\boldsymbol{n = 17}$.

(2)

（a）$x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ より，$(x-1)^2 + y^2 = 4 \cdots ①$

$|x| + |y| = k \cdots ②$ とおくと，円①と正方形②が共有点をもつ.

k が最小になるのは②が点 $(-1,\ 0)$ を通るときより，$\boldsymbol{x = -1}$，$\boldsymbol{y = 0}$ のとき，$\mathbf{1}$.

（b）k が最大になるのは②が①と点 $(1+\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2})$ で接するときより，$\boldsymbol{x = 1+\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{y = \pm\sqrt{2}}$ のとき，$\mathbf{1+2\sqrt{2}}$

(3)　A$(5,\ 1,\ 2)$，B$(-3,\ 7,\ 12)$，直径 AB の中点を M とすると，M$(1,\ 4,\ 7)$ が球面の中心である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (-4,\ 3,\ 5)$ から，$\mathrm{AM} = \sqrt{16+9+25} = 5\sqrt{2}$ が球面の半径である．よって，球面の方程式は $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = 50$.

z 軸の方程式は $x = y = 0$ より，これを代入して $(-1)^2 + (-4)^2 + (z-7)^2 = 50$ から，$(z-7)^2 = 33$. $\therefore$ $z = 7 \pm \sqrt{33}$. よって，球面と z 軸の交点の座標は $(0,\ 0,\ 7\pm\sqrt{33})$ である．したがって，求める線分の長さは $7+\sqrt{33} - (7-\sqrt{33}) = \mathbf{2\sqrt{33}}$.

(4)　$x - 1 = t$ とおくと，$dx = dt$. $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & -1 \to 0 \end{array}$ より，

$$\int_0^1 (x+2)(x-1)^9\,dx = \int_{-1}^0 (t+3)t^9\,dt = \int_{-1}^0 (t^{10} + 3t^9)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{11}}{11} + \frac{3t^{10}}{10}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{11} - \frac{3}{10} = -\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{110}}.$$

(5)　高校・旧制中卒業の方の総数に対する男性の占める割合を t $(0 < t < 1)$，専門学校・短大・高専卒業の方の総数に対する男性の占める割合を s $(0 < s < 1)$ とする.

$303.5 = 404.6t + 186.1(1-t)$ より，$t = \dfrac{117.4}{218.5}$.

$278.6 = 409.0s + 216.6(1-s)$ より，$s = \dfrac{62}{192.4}$.

よって．総数に対する男性の割合が専門学校・短大・高専卒業の方が高校・旧制中卒業の方に比べ低いからである.

2

(1) 複素数平面上で点 $p=3-2i$ を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を q とすると，$\frac{q}{p}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ より，$q=(3-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{3}+\left(-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i.$

よって，求める点の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3},\ -1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$.

(2) 点Cは点Aを中心に点Bを $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点である．よって，$\alpha=1+i$，$\beta=3-2i$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とし，複素数平面上で考えると $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ (複号同順).

すなわち，$\gamma=(2-3i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1+i=2\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}\right)i$ (複号同順).

よって，$\boldsymbol{\mathrm{C}\left(2\pm\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}\right)}$ (複号同順).

(3) β の偏角を θ とすると，点 γ は点 α を実軸に関して対称に移動した後，原点を中心に反時計回りに 2θ 回転した点である．

$\beta=|\beta|(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，$\cos\theta+i\sin\theta=\frac{\beta}{|\beta|}$

したがって，$\cos 2\theta+i\sin 2\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\frac{\beta^2}{|\beta|^2}=\frac{\beta^2}{\beta\overline{\beta}}=\frac{\beta}{\overline{\beta}}$.

よって，$\gamma=\frac{\beta}{\overline{\beta}}\overline{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\beta=\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ である．(証明終)

(4) $\gamma=\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}}$ より，$\mathrm{D}(\delta)$ とすると，$\delta=\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ である．

$\mathrm{AB}\ /\!\!/\ \mathrm{CD}$ より，$\beta-\alpha$ と $\delta-\gamma$ の偏角が 0 または π より，$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が実数である．

$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha\overline{\beta}^2-\overline{\alpha}^2\beta}{\overline{\alpha\beta}(\beta-\alpha)}$ と $\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}\right)}$ より，$\frac{\alpha\overline{\beta}^2-\overline{\alpha}^2\beta}{\overline{\alpha\beta}(\beta-\alpha)}=\frac{\overline{\alpha}\beta^2-\alpha^2\overline{\beta}}{\alpha\beta(\overline{\beta}-\overline{\alpha})}$.

よって，$(\alpha\overline{\beta}^2-\overline{\alpha}^2\beta)\alpha\beta(\overline{\beta}-\overline{\alpha})=\overline{\alpha\beta}(\beta-\alpha)(\overline{\alpha}\beta^2-\alpha^2\overline{\beta})$.

展開して整理すると，$\alpha^3\overline{\alpha\beta}^2-\alpha^2\beta\overline{\beta}^3-\alpha\overline{\alpha}^3\beta^2+\overline{\alpha}^2\beta^3\overline{\beta}=0$

$$\alpha^2\overline{\beta}^2(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})-\overline{\alpha}^2\beta^2(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})=0$$

$$(|\alpha|^2-|\beta|^2)(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)=0$$

よって，　$|\alpha|=|\beta|$，$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$，$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=0$.

$|\alpha|=|\beta|$ のとき，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$

$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$ のとき，$\frac{\alpha}{\beta}=-\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$. 三角形が存在するので $\frac{\alpha}{\beta}\neq 0$ から $\frac{\alpha}{\beta}$ は純虚数である．よって，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$.

$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=0$ のとき，$\frac{\alpha}{\beta}=\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ から，$\frac{\alpha}{\beta}$ は実数である．このとき，3点O，A，Bが同一直線上にあるから三角形が存在しないので不適である．

以上より，$\boldsymbol{\mathrm{OA}=\mathrm{OB}}$ の二等辺三角形または $\boldsymbol{\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}}$ の直角三角形.

3

(1) $S_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{(k+1)k(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

よって，$\lim_{n\to\infty}S_1=\mathbf{1}$.

(2) $S_2=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{(k+2)(k+1)k(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$. よって，$\lim_{n\to\infty}S_2=\mathbf{\frac{1}{4}}$.

(3) $S_3=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{(k+3)(k+2)(k+1)k(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}\right)+\right.$

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$. よって，$\lim_{n\to\infty}S_3=\mathbf{\frac{1}{18}}$.

(4) $S_1=\frac{1}{1}\left\{\frac{1}{1!}-\frac{n!}{(n+1)!}\right\}$, $S_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2!}-\frac{n!}{(n+2)!}\right\}$, $S_3=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3!}-\frac{n!}{(n+3)!}\right\}$.

よって，$S_p=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{p!}-\frac{n!}{(n+p)!}\right\}\cdots$① と推測する.

(i) $n=1$ のとき，

$S_p=\frac{0!}{(1+p)!}=\frac{1}{(1+p)!}$ であるが，①の右辺は

$\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{p!}-\frac{1!}{(1+p)!}\right\}=\frac{1}{p}\cdot\frac{p+1-1}{(p+1)!}=\frac{1}{(p+1)!}$

よって，①は成り立つ.

(ii) $n=l$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$n=l+1$ のとき，

$S_p=\sum_{k=1}^{l+1}\frac{(k-1)!}{(k+p)!}=\sum_{k=1}^{l}\frac{(k-1)!}{(k+p)!}+\frac{l!}{(l+1+p)!}=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{p!}-\frac{l!}{(l+p)!}\right\}+\frac{l!}{(l+1+p)!}$

$=\frac{1}{p\cdot p!}-\frac{l!}{p(l+p)!}+\frac{l!}{(l+1+p)(l+p)!}=\frac{1}{p\cdot p!}+\frac{-l!\{(l+p+1)-p\}}{p(l+p)!(l+1+p)}$

$=\frac{1}{p\cdot p!}+\frac{-l!(l+1)}{p(l+1+p)(l+p)!}=\frac{1}{p\cdot p!}+\frac{-l!(l+1)}{(l+1+p)(l+p)!}$

$=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{p!}-\frac{(l+1)!}{(l+1+p)!}\right\}$

よって，①は $n=l+1$ のときも成り立つ.

以上より，数学的帰納法によって，①はすべての自然数 n で成り立つ.（証明終わり）

講評

$\boxed{1}$は小問集合。(1)〜(4)は典型問題なので確実に得点したい。(5)に戸惑った受験生も多かったことと思われるが、よく考えることができれば、それほど難しくはない。

$\boxed{2}$は複素数平面。(1)(2)は基本問題で落とせない。(3)(4)がどこまでできたかで差がついたものと思われる。

$\boxed{3}$は部分分数分解を用いた数列の輪を求める問題。(1)〜(3)は完答したい。例年よりはやや易化。

合格の基準となる点数については、$\boxed{1}$の(1)〜(4)、$\boxed{2}$と$\boxed{3}$の前半を完答とすれば、6割〜6割5分程度になると思われる。

渋谷校	名古屋校	大阪校
0120-142-760	0120-148-959	0120-142-767
受付9時〜22時（日曜日のみ19時まで）	受付9時〜22時（日曜日のみ19時まで）	受付9時〜22時（日曜日のみ19時まで）
東京都渋谷区桜丘町6-2	名古屋市中村区名駅2-41-20 CK18名駅前ビル2F・6F	大阪府吹田市広芝町４－３４ 江坂第１ビル3F

メルマガ登録（無料）で全教科閲覧できます！
右のQRコードまたはHPからメルマガ登録ができます。

医歯専門予備校 メルリックス学院
MELURIX